Wstęp do pochodnych ułamkowych

Mateusz Szymański

Uniwersytet Śląski, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

13 kwietnia 2012

Niniejsza praca jest poświęcona pewnej partii analizy matematycznej, stosunkowo nowej i nieusystematyzowanej, którą w języku angielskim określa się terminem *fractional calculus*.

Niniejsza praca jest poświęcona pewnej partii analizy matematycznej, stosunkowo nowej i nieusystematyzowanej, którą w języku angielskim określa się terminem *fractional calculus*. Nie istnieje polski odpowiednik tego sformułowania, lecz na potrzeby pracy będę posługiwać się określeniem będącym swobodnym tłumaczeniem: **pochodne ułamkowe**.

Niniejsza praca jest poświęcona pewnej partii analizy matematycznej, stosunkowo nowej i nieusystematyzowanej, którą w języku angielskim określa się terminem *fractional calculus*. Nie istnieje polski odpowiednik tego sformułowania, lecz na potrzeby pracy będę posługiwać się określeniem będącym swobodnym tłumaczeniem: **pochodne ułamkowe**. Jest to próba uogólnienia klasycznych pochodnych (a także i całek, które są bezpośrednio związane z pochodnymi) na liczby rzeczywiste.

Niniejsza praca jest poświęcona pewnej partii analizy matematycznej, stosunkowo nowej i nieusystematyzowanej, którą w języku angielskim określa się terminem *fractional calculus*. Nie istnieje polski odpowiednik tego sformułowania, lecz na potrzeby pracy będę posługiwać się określeniem będącym swobodnym tłumaczeniem: **pochodne ułamkowe**. Jest to próba uogólnienia klasycznych pochodnych (a także i całek, które są bezpośrednio związane z pochodnymi) na liczby rzeczywiste. Historia pochodnych o stopniu niecałkowitym jest tak samo długa jak klasycznych, a za symboliczną datę narodzin uznaje się rok 1695, w którym to Leibniz w odpowiedzi na list de l'Hospitala stwierdza możliwość istnienia takowych pochodnych.

Niniejsza praca jest poświęcona pewnej partii analizy matematycznej, stosunkowo nowej i nieusystematyzowanej, którą w języku angielskim określa się terminem *fractional calculus*. Nie istnieje polski odpowiednik tego sformułowania, lecz na potrzeby pracy będę posługiwać się określeniem będącym swobodnym tłumaczeniem: **pochodne ułamkowe**. Jest to próba uogólnienia klasycznych pochodnych (a także i całek, które są bezpośrednio związane z pochodnymi) na liczby rzeczywiste. Historia pochodnych o stopniu niecałkowitym jest tak samo długa jak klasycznych, a za symboliczną datę narodzin uznaje się rok 1695, w którym to Leibniz w odpowiedzi na list de l'Hospitala stwierdza możliwość istnienia takowych pochodnych. Na pytanie *What if the order will be 1/2?* Leibniz odpowiedział *It will lead to a paradox (...), from which one day useful consequences will be drawn*[1].

[1] W wolnym tłumaczeniu: *Zaprowadzi to do paradoksu, którego użyteczne konsekwencje ujawnią się pewnego dnia.*

W skrócie:

W skrócie:

1. Celem prezentacji jest przybliżenie analitycznego narzędzia jakim są pochodne, a właściwie jego uogólnienia na liczby rzeczywiste.

W skrócie:

1. Celem prezentacji jest przybliżenie analitycznego narzędzia jakim są pochodne, a właściwie jego uogólnienia na liczby rzeczywiste.
2. Przedstawione zostaną wszystkie niezbędne pojęcia oraz wiadomości wymagane do zrozumienia tematu.

W skrócie:

1. Celem prezentacji jest przybliżenie analitycznego narzędzia jakim są pochodne, a właściwie jego uogólnienia na liczby rzeczywiste.
2. Przedstawione zostaną wszystkie niezbędne pojęcia oraz wiadomości wymagane do zrozumienia tematu.
3. Będzie to jedynie wprowadzenie, nie zostaną poruszone ważne problemy z tego działu.

Przed rozpoczęciem uogólniania pochodnych, niezbędne poznanie jest pewnej funkcji specjalnej, mianowicie funkcji $\Gamma(x)$.

Przed rozpoczęciem uogólniania pochodnych, niezbędne poznanie jest pewnej funkcji specjalnej, mianowicie funkcji $\Gamma(x)$.

Definicja

Funkcją Γ określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$[a] nazywamy całkę niewłaściwą postaci:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

[a] Bez przeszkód można rozważać także dziedzinę zespoloną.

Przed rozpoczęciem uogólniania pochodnych, niezbędne poznanie jest pewnej funkcji specjalnej, mianowicie funkcji $\Gamma(x)$.

Definicja

Funkcją Γ określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$[a] nazywamy całkę niewłaściwą postaci:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

[a] Bez przeszkód można rozważać także dziedzinę zespoloną.

- Jest to tzw. funkcja specjalna będąca uogólnieniem silni. Jej podstawową własnością jest zależność:

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Przed rozpoczęciem uogólniania pochodnych, niezbędne poznanie jest pewnej funkcji specjalnej, mianowicie funkcji $\Gamma(x)$.

Definicja

Funkcją Γ określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$[a] nazywamy całkę niewłaściwą postaci:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

[a] Bez przeszkód można rozważać także dziedzinę zespoloną.

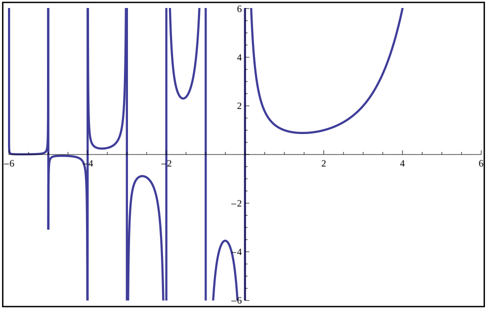
- Jest to tzw. funkcja specjalna będąca uogólnieniem silni. Jej podstawową własnością jest zależność:

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

- Tak jak silnię można określać rekurencyjnie, tak i funkcję Γ można w ten sposób opisać:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \Gamma(x)$:



Kilka ważniejszych wartości:

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{n \to x} |\Gamma(n)| = +\infty$ dla $x \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{n \to x} |\Gamma(n)| = +\infty$ dla $x \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$

Dla $n \in \mathbb{N}$:

- $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{n \to x} |\Gamma(n)| = +\infty$ dla $x \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$

Dla $n \in \mathbb{N}$:

- $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi} = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$

Kilka ważniejszych wartości:

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = 1! = 0!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{n\to x} |\Gamma(n)| = +\infty$ dla $x \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$

Dla $n \in \mathbb{N}$:

- $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi} = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$

gdzie $(2n-1)!! = \prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$ (jest to silnia podwójna). Funkcja nie przyjmuje wartości zerowych.

Bezpośrednio związaną z tą funkcją jest funkcja *poligamma*: $\psi^{(n)}(x)$.

Bezpośrednio związaną z tą funkcją jest funkcja *poligamma*: $\psi^{(n)}(x)$.

Funkcja ψ

Funckja $\psi^{(n)}(x)$ określona jest jako:

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Bezpośrednio związaną z tą funkcją jest funkcja *poligamma*: $\psi^{(n)}(x)$.

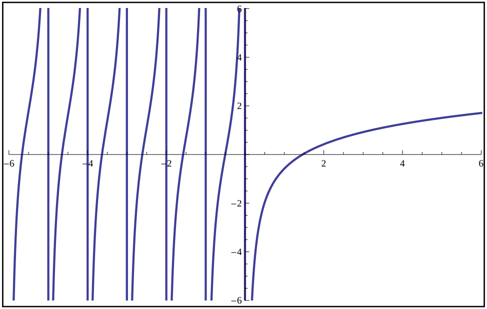
Funkcja ψ

Funckja $\psi^{(n)}(x)$ określona jest jako:

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Dla $n = 0$ otrzymujemy $\psi^{(0)}(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ i taką funkcję nazywamy *digamma*.

Wykres funkcji $f(x) = \psi^{(0)}(x)$ w przedziale $(-6, 6)$:



Z funkcją *digamma* związana jest **stała Eulera-Mascheroniego**, opisywana jako granica ciągu bądź jako całka niewłaściwa:

Z funkcją *digamma* związana jest **stała Eulera-Mascheroniego**, opisywana jako granica ciągu bądź jako całka niewłaściwa:

Stała γ

Stałą Eulera-Mascheroniego definiuje się jako:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = -\int_0^\infty \frac{\ln t}{e^t}\mathrm{d}t \approx 0.5772156649\ldots$$

Z funkcją *digamma* związana jest **stała Eulera-Mascheroniego**, opisywana jako granica ciągu bądź jako całka niewłaściwa:

Stała γ

Stałą Eulera-Mascheroniego definiuje się jako:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = -\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{e^t}\mathrm{d}t \approx 0.5772156649\ldots$$

Związek z funkcją digamma $\psi^{(0)}(x)$ jest następujący:

$$-\gamma = \psi^{(0)}(1) = \Gamma'(1)$$

Definicja niekompletnej górnej funkcji Γ

Niekompletną górną funkcją Γ określoną na zbiorze nazywamy dwuargumentową funkcję:

$$\Gamma(x, s) = \int_s^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Definicja niekompletnej górnej funkcji Γ

Niekompletną górną funkcją Γ określoną na zbiorze nazywamy dwuargumentową funkcję:

$$\Gamma(x, s) = \int_s^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Analogicznie można określić niekompletną dolną funkcję:

Definicja niekompletnej górnej funkcji Γ

Niekompletną górną funkcją Γ określoną na zbiorze nazywamy dwuargumentową funkcję:

$$\Gamma(x, s) = \int_s^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Analogicznie można określić niekompletną dolną funkcję:

Definicja niekompletnej dolnej funkcji γ

Niekompletną dolną funkcją γ określoną na zbiorze nazywamy dwuargumentową funkcję:

$$\gamma(x, s) = \int_0^s t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników.

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Specjalne wartości:

- $\Gamma(1,s) = e^{-s}$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s)+\Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t+\int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Specjalne wartości:

- $\Gamma(1,s) = e^{-s}$
- $\gamma(1,s) = 1 - e^{-s}$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Specjalne wartości:

- $\Gamma(1,s) = e^{-s}$
- $\gamma(1,s) = 1 - e^{-s}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2},s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erf}(x)$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Specjalne wartości:

- $\Gamma(1,s) = e^{-s}$
- $\gamma(1,s) = 1 - e^{-s}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}, s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erf}(x)$
- $\gamma\left(\frac{1}{2}, s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erfc}(x)$

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Specjalne wartości:

- $\Gamma(1,s) = e^{-s}$
- $\gamma(1,s) = 1 - e^{-s}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2},s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erf}(x)$
- $\gamma\left(\frac{1}{2},s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erfc}(x)$

Wyprowadzenia niektórych zależności można znaleźć w [3].

Poniżej przedstawiono pewne zależności dotyczące funkcji Γ i jej niekompletnych odpowiedników. Z definicji:

$$\Gamma(x) = \gamma(x,s) + \Gamma(x,s) = \int_0^s t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_s^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dla obu funkcji istnieją zależności rekurenycjne:

- $\Gamma(x,s) = (x-1)\Gamma(x-1,s) + s^{x-1}e^{-s}$
- $\gamma(x,s) = (x-1)\gamma(x-1,s) - s^{x-1}e^{-s}$

Specjalne wartości:

- $\Gamma(1,s) = e^{-s}$
- $\gamma(1,s) = 1 - e^{-s}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2},s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erf}(x)$
- $\gamma\left(\frac{1}{2},s\right) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{s}\right), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{erfc}(x)$

Wyprowadzenia niektórych zależności można znaleźć w [3]. Przejdźmy już stricte do pochodnych.

Definicja

Pochodną funkcji f nazywa się taką funkcję $f'(x)$, że:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definicja

Pochodną funkcji f nazywa się taką funkcję $f'(x)$, że:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Uwaga 1 Nie zawsze taka granica istnieje. Jeżeli granica dla x_0 nie istnieje, to mówimy, że funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie. W dalszej części nie będziemy jednak rozważać funkcji nieróżniczkowalnych w całej swojej dziedzinie.

Definicja

Pochodną funkcji f nazywa się taką funkcję $f'(x)$, że:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Uwaga 1 Nie zawsze taka granica istnieje. Jeżeli granica dla x_0 nie istnieje, to mówimy, że funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie. W dalszej części nie będziemy jednak rozważać funkcji nieróżniczkowalnych w całej swojej dziedzinie.
- Uwaga 2 Wszystkie podstawowe funkcje elementarne, tj. stałe, potęgowe, trygonometryczne, logarytmiczne, wykładnicze oraz cyklometryczne, są różniczkowalne w swych dziedzinach.

Warto przypomnieć ważne pochodne funkcji:

Warto przypomnieć ważne pochodne funkcji:

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

Warto przypomnieć ważne pochodne funkcji:

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Warto przypomnieć ważne pochodne funkcji:

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$$

Warto przypomnieć ważne pochodne funkcji:

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x$$

Warto przypomnieć ważne pochodne funkcji:

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x$$

Ostatnia funkcja jest funkcją stałą w operacji różniczkowania.

Kluczową własnością pochodnych jest ich **liniowość**:

Kluczową własnością pochodnych jest ich **liniowość**:

Liniowość

Dla dowolnych funkcji f i g oraz stałych rzeczywistych c_1, c_2 zachodzi:

$$(c_1 f(x) + c_2 g(x))' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$$

Kluczową własnością pochodnych jest ich **liniowość**:

Liniowość

Dla dowolnych funkcji f i g oraz stałych rzeczywistych c_1, c_2 zachodzi:

$$(c_1 f(x) + c_2 g(x))' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$$

Na przykład $(\pi e^x + e \sin x)' = \pi(e^x)' + e(\sin x)' = \pi e^x + e \cos x$.

Operację pochodnych można powtarzać, np.:

Operację pochodnych można powtarzać, np.:

$$f(x) = x^4$$

Operację pochodnych można powtarzać, np.:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3$$

Operację pochodnych można powtarzać, np.:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (4x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

Operację pochodnych można powtarzać, np.:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (4x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = (12x^2)' = 12 \cdot 2x = 24x$$

Iteracja pochodnych

Zapis $f^{(a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą pochodną funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $a = 2$: $f^{(2)}(x) = f''(x)$ etc. Dodatkowo, niech $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Iteracja pochodnych

Zapis $f^{(a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą pochodną funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $a = 2$: $f^{(2)}(x) = f''(x)$ etc. Dodatkowo, niech $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Pochodne stopnia całkowitego cechuje pewna własność:

Iteracja pochodnych

Zapis $f^{(a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą pochodną funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $a = 2$: $f^{(2)}(x) = f''(x)$ etc. Dodatkowo, niech $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Pochodne stopnia całkowitego cechuje pewna własność:

Własność 1

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\left(f^{(a)}\right)^{(b)} = f^{(a+b)}$$

Iteracja pochodnych

Zapis $f^{(a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą pochodną funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $a = 2$: $f^{(2)}(x) = f''(x)$ etc. Dodatkowo, niech $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Pochodne stopnia całkowitego cechuje pewna własność:

Własność 1

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\left(f^{(a)}\right)^{(b)} = f^{(a+b)}$$

Zanim przejdzie się do uogólnienia, najpierw warto poznać operację odwrotną do różniczkowania.

Definicja

Całką nieoznaczoną (zwana alternatywnie funkcją pierwotną) funkcji f nazywa się rodzinę funkcji $\int f(x)\mathrm{d}x$, że:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ takich } F, \text{ że } (F(x) + C)' = f(x)$$

Definicja

Całką nieoznaczoną (zwana alternatywnie funkcją pierwotną) funkcji f nazywa się rodzinę funkcji $\int f(x)\mathrm{d}x$, że:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ takich } F, \text{ że } (F(x) + C)' = f(x)$$

- Uwaga Przy tej operacji występuje **stała całkowania**. Jest to dowolna liczba rzeczywista. Jej obecność wynika z tego, że pochodna każdej liczby stałej wynosi 0, a więc nie istnieje dokładnie jedna funkcja pierwotna, lecz pewna nieskończona rodzina funkcji przesuniętych o dowolną stałą.

Operacja ta również posiada własność **liniowości**. Praktycznie rzecz biorąc, wyznaczanie funkcji pierwotnych nie zawsze jest trywialne i nie istnieje jeden schemat ich rozwiązywania (zauważmy, że w przypadku definicji mamy pewną formułę, a nie pewien wzór). Kilka przykładów:

Operacja ta również posiada własność **liniowości**. Praktycznie rzecz biorąc, wyznaczanie funkcji pierwotnych nie zawsze jest trywialne i nie istnieje jeden schemat ich rozwiązywania (zauważmy, że w przypadku definicji mamy pewną formułę, a nie pewien wzór). Kilka przykładów:

$$f(x) = x^n, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ dla } n \neq -1$$

Operacja ta również posiada własność **liniowości**. Praktycznie rzecz biorąc, wyznaczanie funkcji pierwotnych nie zawsze jest trywialne i nie istnieje jeden schemat ich rozwiązywania (zauważmy, że w przypadku definicji mamy pewną formułę, a nie pewien wzór). Kilka przykładów:

$$f(x) = x^n, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ dla } n \neq -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \ln x$$

Operacja ta również posiada własność **liniowości**. Praktycznie rzecz biorąc, wyznaczanie funkcji pierwotnych nie zawsze jest trywialne i nie istnieje jeden schemat ich rozwiązywania (zauważmy, że w przypadku definicji mamy pewną formułę, a nie pewien wzór). Kilka przykładów:

$$f(x) = x^n, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ dla } n \neq -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \ln x$$

$$f(x) = \sin x, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

Operacja ta również posiada własność **liniowości**. Praktycznie rzecz biorąc, wyznaczanie funkcji pierwotnych nie zawsze jest trywialne i nie istnieje jeden schemat ich rozwiązywania (zauważmy, że w przypadku definicji mamy pewną formułę, a nie pewien wzór). Kilka przykładów:

$$f(x) = x^n, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ dla } n \neq -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = \ln x$$

$$f(x) = \sin x, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$f(x) = e^x, \quad \int f(x)\mathrm{d}x = e^x + C$$

Operację całek również można powtarzać, z tą jednak różnicą, że należy pamiętać o stałej całkowania:

Operację całek również można powtarzać, z tą jednak różnicą, że należy pamiętać o stałej całkowania:

$$f(x) = x$$

Operację całek również można powtarzać, z tą jednak różnicą, że należy pamiętać o stałej całkowania:

$$f(x) = x$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Operację całek również można powtarzać, z tą jednak różnicą, że należy pamiętać o stałej całkowania:

$$f(x) = x$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\int\int f(x)\mathrm{d}^2x = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

Operację całek również można powtarzać, z tą jednak różnicą, że należy pamiętać o stałej całkowania:

$$f(x) = x$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\int\int f(x)\mathrm{d}^2x = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} + \underline{C_1x + C_2}$$

Jak widać, całka a-tego stopnia generuje rodzinę wielomianów stopnia $a-1$.

Iteracja całek

Zapis $f^{(-a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą całkę funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(-1)}(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$, $a = 2$: $f^{(-2)}(x) = \int \int f(x)\mathrm{d}^2 x$ etc.

Iteracja całek

Zapis $f^{(-a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą całkę funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(-1)}(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$, $a = 2$: $f^{(-2)}(x) = \int\int f(x)\mathrm{d}^2x$ etc.

Analogiczna własność jak w przypadku pochodnych obowiązuje dla całek.

Iteracja całek

Zapis $f^{(-a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą całkę funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(-1)}(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$, $a = 2$: $f^{(-2)}(x) = \int\int f(x)\mathrm{d}^2x$ etc.

Analogiczna własność jak w przypadku pochodnych obowiązuje dla całek.

Własność 1

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\left(f^{(-a)}\right)^{(-b)} = f^{(-a-b)}$$

Iteracja całek

Zapis $f^{(-a)}(x)$ będzie oznaczać a-tą całkę funkcji f. Dla $a = 1$ otrzymuje się $f^{(-1)}(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$, $a = 2$: $f^{(-2)}(x) = \int\int f(x)\mathrm{d}^2x$ etc.

Analogiczna własność jak w przypadku pochodnych obowiązuje dla całek.

Własność 1

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\left(f^{(-a)}\right)^{(-b)} = f^{(-a-b)}$$

W dalszej części całki będą nazywane pochodnymi, z tym że będą to pochodne **stopnia ujemnego**.

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

$$f^{(-1)}(x) = x, \quad f^{(-2)}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f^{(-n-1)} = \frac{x}{n+1} \cdot f^{(-n)}(x)$$

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

$$f^{(-1)}(x) = x, \quad f^{(-2)}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f^{(-n-1)} = \frac{x}{n+1} \cdot f^{(-n)}(x)$$

Stąd dla a całkowitego niewiększego od 0:

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

$$f^{(-1)}(x) = x, \quad f^{(-2)}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f^{(-n-1)} = \frac{x}{n+1} \cdot f^{(-n)}(x)$$

Stąd dla a całkowitego niewiększego od 0:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

$$f^{(-1)}(x) = x, \quad f^{(-2)}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f^{(-n-1)} = \frac{x}{n+1} \cdot f^{(-n)}(x)$$

Stąd dla a całkowitego niewiększego od 0:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Korzystając z poznanej funkcji Γ:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}$$

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

$$f^{(-1)}(x) = x, \quad f^{(-2)}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f^{(-n-1)} = \frac{x}{n+1} \cdot f^{(-n)}(x)$$

Stąd dla a całkowitego niewiększego od 0:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Korzystając z poznanej funkcji Γ:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}$$

Analogicznie można wyznaczać wzory uogólnione dla innych funkcji.

Mając taki aparat matematyczny, nietrudno znaleźć postać funkcji, jeżeli $a \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, jeżeli $f(x) = 1$, to metodą wyznaczenia rekurencyjnego, można otrzymać postać ogólną (tu, dla klarowności zapisu, pominie się rodzinę generowaną):

$$f^{(-1)}(x) = x, \quad f^{(-2)}(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f^{(-n-1)} = \frac{x}{n+1} \cdot f^{(-n)}(x)$$

Stąd dla a całkowitego niewiększego od 0:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Korzystając z poznanej funkcji Γ:

$$f^{(-n)}(x) = \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}$$

Analogicznie można wyznaczać wzory uogólnione dla innych funkcji. **Natomiast co jeżeli $a \notin \mathbb{Z}$?**

Przede wszystkim trzeba się zastanowić, jakie cechy **powinno** posiadać uogólnienie, by można uważać je za poprawnie skonstruowane.

Przede wszystkim trzeba się zastanowić, jakie cechy **powinno** posiadać uogólnienie, by można uważać je za poprawnie skonstruowane.

Istnienie pochodnej

Jeżeli dowolna funkcja jest a-krotnie różniczkowalna, to istnieje pochodna stopnia $k < a$ dla $a, k \in \mathbb{R}$.

Przede wszystkim trzeba się zastanowić, jakie cechy **powinno** posiadać uogólnienie, by można uważać je za poprawnie skonstruowane.

Istnienie pochodnej

Jeżeli dowolna funkcja jest a-krotnie różniczkowalna, to istnieje pochodna stopnia $k < a$ dla $a, k \in \mathbb{R}$.

Jednoznaczność

Jeżeli pochodna stopnia a dowolnej funkcji istnieje, to jest jedyną pochodną tej funkcji.

Przede wszystkim trzeba się zastanowić, jakie cechy **powinno** posiadać uogólnienie, by można uważać je za poprawnie skonstruowane.

Istnienie pochodnej

Jeżeli dowolna funkcja jest a-krotnie różniczkowalna, to istnieje pochodna stopnia $k < a$ dla $a, k \in \mathbb{R}$.

Jednoznaczność

Jeżeli pochodna stopnia a dowolnej funkcji istnieje, to jest jedyną pochodną tej funkcji.

Identyczność

Pochodna stopnia zerowego dowolnej funkcji zwraca funkcję wyjściową: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Łączność

Dla dowolnej funkcji oraz dla każdych: $a, b \in \mathbb{R}$ $f^{(a+b)}(x) = \left(f^{(a)}(x)\right)^{(b)}$

Łączność

Dla dowolnej funkcji oraz dla każdych: $a, b \in \mathbb{R}$ $f^{(a+b)}(x) = \left(f^{(a)}(x)\right)^{(b)}$

Zgodność

Dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ pochodna dowolnej funkcji jest zgodna z wynikiem otrzymanym poprzez klasyczną iterację całkowania/różniczkowania (z pominięciem stałej całkowania lub w ten sposób utworzonej rodziny wielomianów).

Łączność

Dla dowolnej funkcji oraz dla każdych: $a, b \in \mathbb{R}$ $f^{(a+b)}(x) = \left(f^{(a)}(x)\right)^{(b)}$

Zgodność

Dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ pochodna dowolnej funkcji jest zgodna z wynikiem otrzymanym poprzez klasyczną iterację całkowania/różniczkowania (z pominięciem stałej całkowania lub w ten sposób utworzonej rodziny wielomianów).

Liniowość

Dla dowolnych stałych rzeczywistych $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ oraz dowolnych funkcji zachodzi $(c_1 f(x) + c_2 g(x))^{(a)} = c_1 f^{(a)}(x) + c_2 g^{(a)}(x)$.

Weźmy funkcję $f(x) = x^2$. Wiemy, że jej pochodna wynosi $f^{(1)}(x) = 2x$. Ile wynosi natomiast pochodna stopnia $\frac{1}{2}$?

Weźmy funkcję $f(x) = x^2$. Wiemy, że jej pochodna wynosi $f^{(1)}(x) = 2x$. Ile wynosi natomiast pochodna stopnia $\frac{1}{2}$?
Przypuszczamy na podstawie wzoru, że będzie to:

$$f^{(0)} = x^2, \quad f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = cx^{\frac{3}{2}}, \quad f^{(1)} = 2x^1$$

gdzie c jest jakimś współczynnikiem (na podstawie empirii wnioskujemy, że będzie z przedziału $(1, 2)$) - jak się niedługo przekonamy $f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$.

Weźmy funkcję $f(x) = x^2$. Wiemy, że jej pochodna wynosi $f^{(1)}(x) = 2x$. Ile wynosi natomiast pochodna stopnia $\frac{1}{2}$?
Przypuszczamy na podstawie wzoru, że będzie to:

$$f^{(0)} = x^2, \quad f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = cx^{\frac{3}{2}}, \quad f^{(1)} = 2x^1$$

gdzie c jest jakimś współczynnikiem (na podstawie empirii wnioskujemy, że będzie z przedziału $(1, 2)$) - jak się niedługo przekonamy $f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$.
Jak jednak wyznaczyć takie pochodne w sposób matematyczny i sformalizowany?

Do uogólnienia pochodnych można wykorzystać **iteracyjną postać całek Riemanna-Liouville'a** [2], będące uogólnioną postacią całki.

Do uogólnienia pochodnych można wykorzystać **iteracyjną postać całek Riemanna-Liouville'a** [2], będące uogólnioną postacią całki. Wychodząc z funkcji górnej granicy całkowania:

$$f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Do uogólnienia pochodnych można wykorzystać **iteracyjną postać całek Riemanna-Liouville'a** [2], będące uogólnioną postacią całki. Wychodząc z funkcji górnej granicy całkowania:

$$f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

można przejść do całki kolejnego stopnia w poniższy sposób, równoważnie przestawiając kolejność całkowania:

$$f^{(-2)}(x) = \int_0^x \int_0^{t_2} f(t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

Do uogólnienia pochodnych można wykorzystać **iteracyjną postać całek Riemanna-Liouville'a** [2], będące uogólnioną postacią całki. Wychodząc z funkcji górnej granicy całkowania:

$$f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

można przejść do całki kolejnego stopnia w poniższy sposób, równoważnie przestawiając kolejność całkowania:

$$f^{(-2)}(x) = \int_0^x \int_0^{t_2} f(t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

$$\int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 = \int_0^x f(t_1) \int_{t_1}^x \mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 = \int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$$

Do uogólnienia pochodnych można wykorzystać **iteracyjną postać całek Riemanna-Liouville'a** [2], będące uogólnioną postacią całki. Wychodząc z funkcji górnej granicy całkowania:

$$f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

można przejść do całki kolejnego stopnia w poniższy sposób, równoważnie przestawiając kolejność całkowania:

$$f^{(-2)}(x) = \int_0^x \int_0^{t_2} f(t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

$$\int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 = \int_0^x f(t_1) \int_{t_1}^x \mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 = \int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$$

Można powtarzać ten proces indukcyjnie oraz uogólnić występującą w dalszych iteracjach silnię funkcją gamma. Dolna granica całkowania została ustalona jako 0 (o tym za moment).

Uogólnienie Riemanna-Liouville'a

Całką a tego stopnia (lub: pochodną stopnia $-a$) dowolnej funkcji f określamy jako:

$$ {}_cR^a f(x) = f^{(-a)}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x f(t)(x-t)^{a-1} \mathrm{d}t $$

Uogólnienie Riemanna-Liouville'a

Całką a tego stopnia (lub: pochodną stopnia $-a$) dowolnej funkcji f określamy jako:

$$ {}_cR^a f(x) = f^{(-a)}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x f(t)(x-t)^{a-1} \mathrm{d}t $$

Warto zwrócić uwagę, że dolna granica całkowania c – zwana dalej *punktem bazowym* – jest ustalana arbitralnie (najczęściej jednak będzie równa 0) i może być dowolną liczbą należącą do uzupełnionych liczb rzeczywistych.

Uogólnienie Riemanna-Liouville'a

Całką a tego stopnia (lub: pochodną stopnia $-a$) dowolnej funkcji f określamy jako:

$$ {}_cR^a f(x) = f^{(-a)}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x f(t)(x-t)^{a-1} \mathrm{d}t $$

Warto zwrócić uwagę, że dolna granica całkowania c – zwana dalej *punktem bazowym* – jest ustalana arbitralnie (najczęściej jednak będzie równa 0) i może być dowolną liczbą należącą do uzupełnionych liczb rzeczywistych. Oznacza to, że **uogólnienie pochodnych nie jest operacją globalną**, co jest bardzo ważną dla nas informacją (innymi słowy: można uzyskać różne formy pochodnych, wybierając inne punkty bazowe). Jeżeli funkcja określona jest na przedziale $[a, b]$, oczywiście $c \in [a, b]$.

Dla komplementarności przyjmijmy dodatkowo, że ${}_cR^0 f(x) = f(x)$.

Wyrażenie Riemanna-Liouville'a nie jest określone dla każdych a, jedynie dla $a \geqslant 0$, jednak na tej podstawie można zdefiniować pochodne jako:

$$f^{(a)}(x) = \left(f^{(-\lceil a \rceil + a)}\right)^{(\lceil a \rceil)}$$

gdzie $\lceil a \rceil$ oznacza sufit liczby a.

Wyrażenie Riemanna-Liouville'a nie jest określone dla każdych a, jedynie dla $a \geqslant 0$, jednak na tej podstawie można zdefiniować pochodne jako:

$$f^{(a)}(x) = \left(f^{(-\lceil a\rceil + a)}\right)^{(\lceil a\rceil)}$$

gdzie $\lceil a\rceil$ oznacza sufit liczby a. Z pewnych względów jest to jednak mało wygodne.

Wyrażenie Riemanna-Liouville'a nie jest określone dla każdych a, jedynie dla $a \geqslant 0$, jednak na tej podstawie można zdefiniować pochodne jako:

$$f^{(a)}(x) = \left(f^{(-\lceil a \rceil + a)}\right)^{(\lceil a \rceil)}$$

gdzie $\lceil a \rceil$ oznacza sufit liczby a. Z pewnych względów jest to jednak mało wygodne. Można wprowadzić też wygodniejszy operator różniczko-całkowy dla $a \in \langle k-1, k \rangle$:

$$f^{(a)} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} {}_c R^{a-k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(k-a)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_c^x (x-t)^{k-a-1} f(t) \mathrm{d}t$$

Formuła Riemanna-Liouville'a dla stopnia $a \in \mathbb{R}^-$ generuje wielomian W_{a-1} o wyrazach $C_0 x^{\{a\}}$, $C_1 x^{\{a\}+1}$ etc., posiadającą $\lceil a \rceil$ wyrazów, gdzie $\{a\}$ oznacza mantysę.

Twierdzenie

Operator całkowy Riemmana-Liouville'a jest liniowy, tj.:

$$_cR^a\,(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\, _cR^a\, f(x) + \beta\, _cR^a\, g(x)$$

Twierdzenie

Operator całkowy Riemmana-Liouville'a jest liniowy, tj.:

$$ {}_cR^a\,(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\,{}_cR^a\,f(x) + \beta\,{}_cR^a\,g(x) $$

Dowód. Z definicji:

$$ {}_cR^a\,(\alpha f(x) + \beta g(x)) = $$

Twierdzenie

Operator całkowy Riemmana-Liouville'a jest liniowy, tj.:

$$ {}_cR^a\,(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha\,{}_cR^a\,f(x)+\beta\,{}_cR^a\,g(x) $$

Dowód. Z definicji:

$$ {}_cR^a\,(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \dots $$

$$ \dots = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_c^x (\alpha f(t)+\beta g(t))\,(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t = $$

Twierdzenie

Operator całkowy Riemmana-Liouville'a jest liniowy, tj.:

$$ {}_cR^a\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha\, {}_cR^a f(x)+\beta\, {}_cR^a g(x) $$

Dowód. Z definicji:

$$ {}_cR^a\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\ \ldots $$

$$ \ldots\ =\frac{1}{\Gamma(a)}\int_c^x\left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t=\ \ldots $$

$$ \ldots\ =\frac{1}{\Gamma(a)}\int_c^x\left[\alpha f(t)(x-t)^{a-1}+\beta g(t)(x-t)^{a-1}\right]\mathrm{d}t= $$

Twierdzenie

Operator całkowy Riemmana-Liouville'a jest liniowy, tj.:

$$ {}_cR^a\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha\,{}_cR^a f(x)+\beta\,{}_cR^a g(x) $$

Dowód. Z definicji:

$$
\begin{aligned}
& {}_cR^a\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)= \dots \\
\dots &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_c^x \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t = \dots \\
\dots &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_c^x \left[\alpha f(t)(x-t)^{a-1}+\beta g(t)(x-t)^{a-1}\right]\mathrm{d}t = \dots \\
\dots &= \frac{\alpha}{\Gamma(a)}\int_c^x f(t)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t+\frac{\beta}{\Gamma(a)}\int_c^x g(t)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

Twierdzenie

Operator całkowy Riemmana-Liouville'a jest liniowy, tj.:

$$ {}_cR^a\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\, {}_cR^a f(x) + \beta\, {}_cR^a g(x) $$

Dowód. Z definicji:

$$
\begin{aligned}
& {}_cR^a\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \ \ldots \\
\ldots \quad &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t = \ \ldots \\
\ldots \quad &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x \left[\alpha f(t)(x-t)^{a-1} + \beta g(t)(x-t)^{a-1}\right]\mathrm{d}t = \ \ldots \\
\ldots \quad &= \frac{\alpha}{\Gamma(a)} \int_c^x f(t)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t + \frac{\beta}{\Gamma(a)} \int_c^x g(t)(x-t)^{a-1}\mathrm{d}t = \ \ldots \\
\ldots \quad &= \alpha\, {}_cR^a f(x) + \beta\, {}_cR^a g(x)
\end{aligned}
$$

Co należało pokazać. □

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji f oraz $a, b \geqslant 0$ zachodzi:

$$ {}_cR^{a+b} f(x) = {}_cR^a \left({}_cR^b f(x) \right) \Leftrightarrow f^{(-a-b)} = \left(f^{(-b)} \right)^{(-a)}, \quad a, b \geqslant 0 $$

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji f oraz $a, b \geqslant 0$ zachodzi:

$$ {}_cR^{a+b} f(x) = {}_cR^{a} \left({}_cR^{b} f(x)\right) \Leftrightarrow f^{(-a-b)} = \left(f^{(-b)}\right)^{(-a)}, \quad a, b \geqslant 0 $$

Dowód tego twierdzenia zostanie pominięty, chętnych odsyłam do pozycji [3]. Samo wyprowadzenie tego faktu opiera się na definicji oraz:

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji f oraz $a, b \geqslant 0$ zachodzi:

$$ {}_cR^{a+b} f(x) = {}_cR^a \left({}_cR^b f(x)\right) \Leftrightarrow f^{(-a-b)} = \left(f^{(-b)}\right)^{(-a)}, \quad a, b \geqslant 0 $$

Dowód tego twierdzenia zostanie pominięty, chętnych odsyłam do pozycji [3]. Samo wyprowadzenie tego faktu opiera się na definicji oraz:

1. umiejętnej zamiany granic całkowania funkcji,

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji f oraz $a, b \geqslant 0$ zachodzi:

$$ {}_cR^{a+b} f(x) = {}_cR^{a} \left({}_cR^{b} f(x) \right) \Leftrightarrow f^{(-a-b)} = \left(f^{(-b)} \right)^{(-a)}, \quad a, b \geqslant 0 $$

Dowód tego twierdzenia zostanie pominięty, chętnych odsyłam do pozycji [3]. Samo wyprowadzenie tego faktu opiera się na definicji oraz:

1. umiejętnej zamiany granic całkowania funkcji,
2. zastosowaniu twierdzenia Fubiniego,

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji f *oraz* $a, b \geqslant 0$ *zachodzi:*

$$ {}_cR^{a+b} f(x) = {}_cR^a \left({}_cR^b f(x)\right) \Leftrightarrow f^{(-a-b)} = \left(f^{(-b)}\right)^{(-a)}, \quad a, b \geqslant 0 $$

Dowód tego twierdzenia zostanie pominięty, chętnych odsyłam do pozycji [3]. Samo wyprowadzenie tego faktu opiera się na definicji oraz:

1. umiejętnej zamiany granic całkowania funkcji,
2. zastosowaniu twierdzenia Fubiniego,
3. wykorzystania funkcji $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$.

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji f oraz $a, b \geqslant 0$ zachodzi:

$$ {}_cR^{a+b} f(x) = {}_cR^a \left({}_cR^b f(x) \right) \Leftrightarrow f^{(-a-b)} = \left(f^{(-b)} \right)^{(-a)}, \quad a, b \geqslant 0 $$

Dowód tego twierdzenia zostanie pominięty, chętnych odsyłam do pozycji [3]. Samo wyprowadzenie tego faktu opiera się na definicji oraz:

1. umiejętnej zamiany granic całkowania funkcji,
2. zastosowaniu twierdzenia Fubiniego,
3. wykorzystania funkcji $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$.

UWAGA! Twierdzenie **NIE** jest prawdziwe w ogólności dla $a, b < 0$!

Kontrprzykład. Niech $f(x) = 1$. Wtedy, oczywiście:

Kontrprzykład. Niech $f(x) = 1$. Wtedy, oczywiście:

$$f^{(1)}(x) = 0 = g(x)$$

Kontrprzykład. Niech $f(x) = 1$. Wtedy, oczywiście:

$$f^{(1)}(x) = 0 = g(x)$$

Wybierzmy teraz $a = \frac{1}{2}$ oraz punkt bazowy $c = 0$. Zgodnie z formułą daną wyżej, funkcja $g^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ jest równa:

$$g^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \left(g^{\left(-\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil\right)} = \left(g^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)}$$

Kontrprzykład. Niech $f(x) = 1$. Wtedy, oczywiście:

$$f^{(1)}(x) = 0 = g(x)$$

Wybierzmy teraz $a = \frac{1}{2}$ oraz punkt bazowy $c = 0$. Zgodnie z formułą daną wyżej, funkcja $g^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ jest równa:

$$g^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \left(g^{\left(-\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil\right)} = \left(g^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)}$$

$$\left(g^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x g(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

Ale jeżeli $g \equiv 0$, to $\int_0^x g(t)(x-t)^{\frac{-1}{2}} \mathrm{d}t = 0$, co implikuje $\left(g^{-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)} = 0$.

Kontrprzykład. Niech $f(x) = 1$. Wtedy, oczywiście:

$$f^{(1)}(x) = 0 = g(x)$$

Wybierzmy teraz $a = \frac{1}{2}$ oraz punkt bazowy $c = 0$. Zgodnie z formułą daną wyżej, funkcja $g^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ jest równa:

$$g^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \left(g^{\left(-\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil\right)} = \left(g^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)}$$

$$\left(g^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x g(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

Ale jeżeli $g \equiv 0$, to $\int_0^x g(t)(x-t)^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}t = 0$, co implikuje $\left(g^{-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{(1)} = 0$. Z drugiej jednak strony:

$$f^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x) = \left(f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{(2)}(x)$$

Policzmy uprzednio $f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$:

Policzmy uprzednio $f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$:

$$f^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

Policzmy uprzednio $f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$:

$$f^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

$f \equiv 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, stąd:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \mathrm{d}t = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\sqrt{x-t}\right) \Big|_0^x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Policzmy uprzednio $f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$:

$$f^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

$f \equiv 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, stąd:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \mathrm{d}t = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\sqrt{x-t}\right) \Big|_0^x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Licząc drugą pochodną, otrzymamy:

$$f^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}} \neq 0 = \left(f^{(1)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$$

Policzmy uprzednio $f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$:

$$f^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

$f \equiv 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, stąd:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \mathrm{d}t = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\sqrt{x-t}\right) \Big|_0^x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Licząc drugą pochodną, otrzymamy:

$$f^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}} \neq 0 = \left(f^{(1)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$$

Zależność $f^{(a+b)} = \left(f^{b}\right)^{(a)}$ nie jest prawidłowa tylko dla szczególnych przypadków. Dokładniejsze warunki zostaną podane w drugiej części.

Wspomniany wyżej punkt bazowy sprawia, iż wyniki całkowania mogą się od siebie różnić. Przykładowo:

Wspomniany wyżej punkt bazowy sprawia, iż wyniki całkowania mogą się od siebie różnić. Przykładowo:

$$ {}_0R^1\, x^2 = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x t(x-t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^x t \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} $$

Wspomniany wyżej punkt bazowy sprawia, iż wyniki całkowania mogą się od siebie różnić. Przykładowo:

$$ {}_0R^1\, x^2 = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x t(x-t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} $$

ale:

$$ \boxed{2}R^1\, x^2 = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_{\boxed{2}}^x t(x-t)^{1-1} \mathrm{d}t = \int_{\boxed{2}}^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \boxed{(-2)} $$

Wspomniany wyżej punkt bazowy sprawia, iż wyniki całkowania mogą się od siebie różnić. Przykładowo:

$$ {}_0R^1\, x^2 = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x t(x-t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} $$

ale:

$$ {}_{\boxed{2}}R^1\, x^2 = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_{\boxed{2}}^x t(x-t)^{1-1} \mathrm{d}t = \int_{\boxed{2}}^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \boxed{(-2)} $$

Nie jest to problemem, gdy różnica jest wielomianem stopnia niewiększego niż $a-1$ (jest to zgodne z definicją).

Natomiast przykładowo dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$ {}_0R^1 \, \frac{1}{x} = \int_0^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t $$

Natomiast przykładowo dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$
{}_0R^1 \frac{1}{x} = \int_0^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t
$$

nie istnieje funkcja pierwotna tego operatora dla punktu bazowego $c = 0$, ponieważ powyższa całka jest rozbieżna. Dla $c > 0$ całka Riemanna-Liouville'a będzie określona tylko dla dodatnich x, natomiast dla $c < 0$ przeciwnie, co koresponduje z wynikiem całkowania $F(x) = \ln x$.

[2] W notacji skróconej, tj. $f^{(-a)}$ reszta wielomianowa będzie prezentowana jako zerowa.

Natomiast przykładowo dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$ {}_0R^1 \frac{1}{x} = \int_0^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t $$

nie istnieje funkcja pierwotna tego operatora dla punktu bazowego $c = 0$, ponieważ powyższa całka jest rozbieżna. Dla $c > 0$ całka Riemanna-Liouville'a będzie określona tylko dla dodatnich x, natomiast dla $c < 0$ przeciwnie, co koresponduje z wynikiem całkowania $F(x) = \ln x$.

Dla wygody punkt bazowy najlepiej dobrać jako $f^{(-a)}(a) = 0$, jeżeli jest to możliwe – reszta wielomianowa będzie zerowa[2].

[2]W notacji skróconej, tj. $f^{(-a)}$ reszta wielomianowa będzie prezentowana jako zerowa.

Rozważmy $f(x) = e^x$. Jeżeli chcemy, by funkcja ta była niezmiennikiem operacji całkowania dla dowolnego a, punkt c nie może być dowolny; przykładowo:

Rozważmy $f(x) = e^x$. Jeżeli chcemy, by funkcja ta była niezmiennikiem operacji całkowania dla dowolnego a, punkt c nie może być dowolny; przykładowo:

$$_0R^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t$$

jest tożsame z e^x tylko dla $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Rozważmy $f(x) = e^x$. Jeżeli chcemy, by funkcja ta była niezmiennikiem operacji całkowania dla dowolnego a, punkt c nie może być dowolny; przykładowo:

$$ {}_0R^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t $$

jest tożsame z e^x tylko dla $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dla $a = \frac{1}{2}$ zachodzi:

$$ {}_0R^{\frac{1}{2}}\, e^x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x e^t (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^t (x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t $$

Rozważmy $f(x) = e^x$. Jeżeli chcemy, by funkcja ta była niezmiennikiem operacji całkowania dla dowolnego a, punkt c nie może być dowolny; przykładowo:

$$ {}_0R^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t $$

jest tożsame z e^x tylko dla $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dla $a = \frac{1}{2}$ zachodzi:

$$ {}_0R^{\frac{1}{2}}\, e^x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x e^t (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^t (x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t $$

Dla podstawienia $u = \sqrt{x-t}$, $\mathrm{d}t = -2u\mathrm{d}u$ otrzymujemy:

$$ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x-t}} \frac{-2u \cdot e^t}{u} \mathrm{d}u = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x-t}} e^{x-u^2} \mathrm{d}u = -e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x-t})\Big|_0^x $$

Rozważmy $f(x) = e^x$. Jeżeli chcemy, by funkcja ta była niezmiennikiem operacji całkowania dla dowolnego a, punkt c nie może być dowolny; przykładowo:

$$ {}_0R^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t $$

jest tożsame z e^x tylko dla $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dla $a = \frac{1}{2}$ zachodzi:

$$ {}_0R^{\frac{1}{2}}\, e^x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x e^t (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^t (x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t $$

Dla podstawienia $u = \sqrt{x-t}$, $\mathrm{d}t = -2u\mathrm{d}u$ otrzymujemy:

$$ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x-t}} \frac{-2u \cdot e^t}{u} \mathrm{d}u = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x-t}} e^{x-u^2} \mathrm{d}u = -e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x-t})\Big|_0^x $$

Co po przeliczeniu daje ${}_0R^{\frac{1}{2}}\, e^x = e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x})$.

Twierdzenie

Jedynym $c \in \overline{\mathbb{R}}$*, dla którego zachodzi:*

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+} \; {}_aR^c e^x = e^x$$

jest $c = -\infty$.

Twierdzenie

Jedynym $c \in \overline{\mathbb{R}}$, dla którego zachodzi:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+} \ {}_aR^c e^x = e^x$$

jest $c = -\infty$.

Dowód. Dla podstawienia liniowego $u = x - t$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$:

$${}_cR^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_{x-c}^0 e^{x-u} u^{a-1} \mathrm{d}u$$

Twierdzenie

Jedynym $c \in \overline{\mathbb{R}}$, dla którego zachodzi:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+} \ {}_aR^c e^x = e^x$$

jest $c = -\infty$.

Dowód. Dla podstawienia liniowego $u = x - t$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$:

$${}_cR^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_{x-c}^0 e^{x-u} u^{a-1} \mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{x-c} e^{x-u} u^{a-1} \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(a)} e^x \int_0^{x-c} e^{-u} u^{a-1} \mathrm{d}u$$

Twierdzenie

Jedynym $c \in \overline{\mathbb{R}}$, dla którego zachodzi:

$$\forall_{a\in\mathbb{R}^+} \; {}_aR^c e^x = e^x$$

jest $c = -\infty$.

Dowód. Dla podstawienia liniowego $u = x - t$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$:

$$ {}_cR^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x e^t (x-t)^{a-1} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_{x-c}^0 e^{x-u} u^{a-1} \mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{x-c} e^{x-u} u^{a-1} \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(a)} e^x \int_0^{x-c} e^{-u} u^{a-1} \mathrm{d}u$$

Zauważmy, iż powyższa całka jest niekompletną funkcją $\gamma(a, x-c)$:

Twierdzenie

Jedynym $c \in \overline{\mathbb{R}}$, dla którego zachodzi:

$$\forall_{a\in\mathbb{R}^+}\ {}_aR^c e^x = e^x$$

jest $c = -\infty$.

Dowód. Dla podstawienia liniowego $u = x - t$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$:

$$_cR^a\, e^x = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_c^x e^t (x-t)^{a-1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\Gamma(a)}\int_{x-c}^0 e^{x-u}u^{a-1}\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{x-c} e^{x-u}u^{a-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(a)}e^x\int_0^{x-c} e^{-u}u^{a-1}\mathrm{d}u$$

Zauważmy, iż powyższa całka jest niekompletną funkcją $\gamma(a, x-c)$:

$$\frac{1}{\Gamma(a)}e^x\int_0^{x-c} e^{-u}u^{a-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(a)}\left(e^x\gamma(a, x-c)\right)$$

Z zależności $\Gamma(a) = \gamma(a, x-c) + \Gamma(a, x-c)$:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} e^x \left(\Gamma(a) - \gamma(a, x-c)\right) = e^x \left(1 - \frac{\gamma(a, x-c)}{\Gamma(a)}\right)$$

Z zależności $\Gamma(a) = \gamma(a, x-c) + \Gamma(a, x-c)$:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} e^x \left(\Gamma(a) - \gamma(a, x-c)\right) = e^x \left(1 - \frac{\gamma(a, x-c)}{\Gamma(a)}\right)$$

Aby otrzymać ${}_cR^a\, e^x = e^x$, $\gamma(a, x-c) = 0$, a to jest tylko możliwe dla $c \to -\infty$. $\square$

Przedstawione uogólnienie ma, poza szeregiem zastosowań, niektóre wady, tj.:

Przedstawione uogólnienie ma, poza szeregiem zastosowań, niektóre wady, tj.:

- nie jest dobrze zdefiniowana dla pochodnych $a > 0$,

Przedstawione uogólnienie ma, poza szeregiem zastosowań, niektóre wady, tj.:

- nie jest dobrze zdefiniowana dla pochodnych $a > 0$,
- wymaga sporo rachunków nawet dla elementarnych funkcji,

Przedstawione uogólnienie ma, poza szeregiem zastosowań, niektóre wady, tj.:

- nie jest dobrze zdefiniowana dla pochodnych $a > 0$,
- wymaga sporo rachunków nawet dla elementarnych funkcji,
- jest operacją lokalną i wymaga precyzyjnego dobierania punktów bazowych,

Przedstawione uogólnienie ma, poza szeregiem zastosowań, niektóre wady, tj.:

- nie jest dobrze zdefiniowana dla pochodnych $a > 0$,
- wymaga sporo rachunków nawet dla elementarnych funkcji,
- jest operacją lokalną i wymaga precyzyjnego dobierania punktów bazowych,
- nie pozwala wyznaczać całek nieelementarnych (jako operator notabene wyprowadzony z operacji całkowania).

Przedstawione uogólnienie ma, poza szeregiem zastosowań, niektóre wady, tj.:

- nie jest dobrze zdefiniowana dla pochodnych $a > 0$,
- wymaga sporo rachunków nawet dla elementarnych funkcji,
- jest operacją lokalną i wymaga precyzyjnego dobierania punktów bazowych,
- nie pozwala wyznaczać całek nieelementarnych (jako operator notabene wyprowadzony z operacji całkowania).

Istnieją także inne uogólnienie, np. Grünwalda-Letnikowa (patrz [1]), wyprowadzone z definicji pochodnej – o całkiem innej naturze.

Aparat pochodnych ułamkowych, bo tak będziemy nazywać każde uogólnienie tego rodzaju, **nie musi spełniać wszystkich wymienionych cech**, jak zostało to pokazane przy warunku łączności.

Aparat pochodnych ułamkowych, bo tak będziemy nazywać każde uogólnienie tego rodzaju, **nie musi spełniać wszystkich wymienionych cech**, jak zostało to pokazane przy warunku łączności. Na przestrzeni czasu różnie podchodzono do prób uogólnienia pochodnych: jako **suma dyskretna** (1867, Grünwald) czy **szereg potęgowy** (1832, Liouville).

Aparat pochodnych ułamkowych, bo tak będziemy nazywać każde uogólnienie tego rodzaju, **nie musi spełniać wszystkich wymienionych cech**, jak zostało to pokazane przy warunku łączności. Na przestrzeni czasu różnie podchodzono do prób uogólnienia pochodnych: jako **suma dyskretna** (1867, Grünwald) czy **szereg potęgowy** (1832, Liouville). W 1850 roku William Center, badając pochodne stałej różnymi metodami, stwierdził, że **istnieje wiele uogólnień i żadne z nich nie jest wyróżnione** [2]. A zatem można uzyskać różne derywatywy (warto nadmienić, iż przy odpowiednich założeniach niektóre uogólnienia są sobie równoważne) tej samej funkcji w innych wariantach uogólnień. Nie znaczy to jednak, że otrzymane rezultaty są sprzeczne, dotyczą wszak **różnych operatorów**.

Wróćmy do funkcji $f(x) = 2x$. Wyznaczmy pochodną stopnia $-\frac{1}{2}$ (a więc całkę *połówkową*) z poznanej formuły:

Wróćmy do funkcji $f(x) = 2x$. Wyznaczmy pochodną stopnia $-\frac{1}{2}$ (a więc całkę *połówkową*) z poznanej formuły:

$$f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x 2t(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

Wróćmy do funkcji $f(x) = 2x$. Wyznaczmy pochodną stopnia $-\frac{1}{2}$ (a więc całkę *połówkową*) z poznanej formuły:

$$f^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\frac{1}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x 2t(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x 2t(x-t)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{4}{3} \sqrt{x-t}(t+2x) \mathrm{d}t \right) \Bigg|_0^x = \boxed{\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}}$$

O tym, że pochodne ułamkowe „działają”, można się przekonać, np. wyprowadzając wzór na a-tą pochodną logarytmu.

O tym, że pochodne ułamkowe „działają”, można się przekonać, np. wyprowadzając wzór na a-tą pochodną logarytmu.

Pochodna logarytmu

a-tą pochodną funkcji logarytmicznej $f(x) = \ln x$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

O tym, że pochodne ułamkowe „działają”, można się przekonać, np. wyprowadzając wzór na a-tą pochodną logarytmu.

Pochodna logarytmu

a-tą pochodną funkcji logarytmicznej $f(x) = \ln x$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Wyprowadzenie. Wychodząc z formuły Riemanna-Liouville'a dla $f(x) = \ln x$ dla $a < 0$ dobierzmy podstawienie $u = \frac{x-t}{x}$, $du = -\frac{dt}{x}$, $t = x(1-u)$:

O tym, że pochodne ułamkowe „działają”, można się przekonać, np. wyprowadzając wzór na a-tą pochodną logarytmu.

Pochodna logarytmu

a-tą pochodną funkcji logarytmicznej $f(x) = \ln x$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Wyprowadzenie. Wychodząc z formuły Riemanna-Liouville'a dla $f(x) = \ln x$ dla $a < 0$ dobierzmy podstawienie $u = \frac{x-t}{x}$, $\mathrm{d}u = -\frac{dt}{x}$, $t = x(1-u)$:

$$f^{(a)} = \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^x \ln t (x-t)^{-a-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^1 x \ln(x(1-u)) \cdot (xu)^{-a-1} \mathrm{d}u$$

O tym, że pochodne ułamkowe „działają", można się przekonać, np. wyprowadzając wzór na a-tą pochodną logarytmu.

Pochodna logarytmu

a-tą pochodną funkcji logarytmicznej $f(x) = \ln x$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Wyprowadzenie. Wychodząc z formuły Riemanna-Liouville'a dla $f(x) = \ln x$ dla $a < 0$ dobierzmy podstawienie $u = \frac{x-t}{x}$, $\mathrm{d}u = -\frac{dt}{x}$, $t = x(1-u)$:

$$f^{(a)} = \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^x \ln t (x-t)^{-a-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^1 x \ln(x(1-u)) \cdot (xu)^{-a-1} \mathrm{d}u$$

Wyłączając x^{-a} oraz korzystając z tożsamości $\ln(p \cdot q) = \ln p + \ln q$:

$$\frac{x^{-a}}{\Gamma(-a)} \left(\ln x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}} + \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{a+1}} \mathrm{d}u \right)$$

Podczas gdy $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}}$ wynosi $-\dfrac{1}{a}$, drugą całkę można wyznaczyć przez części:

Podczas gdy $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}}$ wynosi $-\frac{1}{a}$, drugą całkę można wyznaczyć przez części:

$$\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{a\ln(1-u)}{u^{a+1}}\mathrm{d}u = \left| \begin{array}{ll} \mathrm{d}g = au^{-a-1} & h = \ln(1-u) \\ g = 1 - u^{-a} & \mathrm{d}h = \frac{-1}{1-u} \end{array} \right| = \dots$$

Podczas gdy $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}}$ wynosi $-\frac{1}{a}$, drugą całkę można wyznaczyć przez części:

$$\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{a\ln(1-u)}{u^{a+1}}\mathrm{d}u = \left| \begin{array}{ll} \mathrm{d}g = au^{-a-1} & h = \ln(1-u) \\ g = 1-u^{-a} & \mathrm{d}h = \frac{-1}{1-u} \end{array} \right| = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{a}\left((1-u^{-a})\ln(1-u)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1-u^{-a}}{1-u} \right)$$

Podczas gdy $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}}$ wynosi $-\frac{1}{a}$, drugą całkę można wyznaczyć przez części:

$$\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{a\ln(1-u)}{u^{a+1}}\mathrm{d}u = \left|\begin{array}{ll} \mathrm{d}g = au^{-a-1} & h = \ln(1-u) \\ g = 1-u^{-a} & \mathrm{d}h = \frac{-1}{1-u} \end{array}\right| = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{a}\left((1-u^{-a})\ln(1-u)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1-u^{-a}}{1-u} \right)$$

Pierwszy fragment równy jest 0, natomiast drugi należy porównać z funkcją $\psi^{(0)}$:

Podczas gdy $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}}$ wynosi $-\frac{1}{a}$, drugą całkę można wyznaczyć przez części:

$$\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{a\ln(1-u)}{u^{a+1}}\mathrm{d}u = \left| \begin{array}{ll} \mathrm{d}g = au^{-a-1} & h = \ln(1-u) \\ g = 1-u^{-a} & \mathrm{d}h = \frac{-1}{1-u} \end{array} \right| = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{a}\left((1-u^{-a})\ln(1-u)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1-u^{-a}}{1-u} \right)$$

Pierwszy fragment równy jest 0, natomiast drugi należy porównać z funkcją $\psi^{(0)}$:

$$\psi^{(0)}(1-a) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{-a}}{1-t}\mathrm{d}t$$

Ostatecznie, scalając uzyskane wyniki:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Ostatecznie, scalając uzyskane wyniki:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Wyrażenie zostało obłożone granicą, by można było mówić o tych a, dla których $\Gamma(1-a) \to \pm\infty$.

Ostatecznie, scalając uzyskane wyniki:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Wyrażenie zostało obłożone granicą, by można było mówić o tych a, dla których $\Gamma(1-a) \to \pm\infty$. Co ciekawe, wzór jest prawidłowy dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$, mimo iż został wyprowadzony tylko dla $a < 0$.

Ostatecznie, scalając uzyskane wyniki:

$$f^{(a)}(x) = \lim_{n \to a} x^{-a} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right)$$

Wyrażenie zostało obłożone granicą, by można było mówić o tych a, dla których $\Gamma(1-a) \to \pm\infty$. Co ciekawe, wzór jest prawidłowy dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$, mimo iż został wyprowadzony tylko dla $a < 0$. Nietrudno teraz wyznaczyć dowolną derywatywę funkcji logarytmicznej (trzeba jednak znać wybrane wartości funkcji $\Gamma(x)$ oraz $\psi^{(0)}(x)$). Przeliczmy kilka przykładów.

$$f^{(0)}(x) = \lim_{n \to 0} x^0 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right)$$

$$f^{(0)}(x) = \lim_{n \to 0} x^0 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right)$$

$$\left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right) = \ln x + \gamma - \gamma = \boxed{\ln x}$$

$$f^{(0)}(x) = \lim_{n \to 0} x^0 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right)$$

$$\left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right) = \ln x + \gamma - \gamma = \boxed{\ln x}$$

$$f^{(-3)}(x) = \lim_{n \to -3} x^3 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = x^3 \left(\ln x - \frac{\frac{11}{6}}{3!} \right)$$

$$f^{(0)}(x) = \lim_{n\to 0} x^0 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right)$$

$$\left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right) = \ln x + \gamma - \gamma = \boxed{\ln x}$$

$$f^{(-3)}(x) = \lim_{n\to -3} x^3 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = x^3 \left(\ln x - \frac{\frac{11}{6}}{3!} \right)$$

$$x^3 \left(\ln x - \frac{\frac{11}{6}}{3!} \right) = \boxed{\frac{x^3}{6} \left(6 \ln x - \frac{11}{6} \right)}$$

$$f^{(0)}(x) = \lim_{n \to 0} x^0 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right)$$

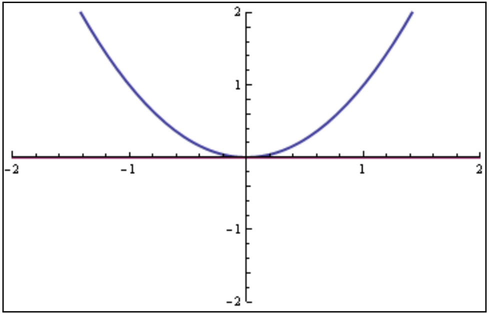
$$\left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1) - \gamma}{\Gamma(1)} \right) = \ln x + \gamma - \gamma = \boxed{\ln x}$$

$$f^{(-3)}(x) = \lim_{n \to -3} x^3 \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = x^3 \left(\ln x - \frac{\frac{11}{6}}{3!} \right)$$

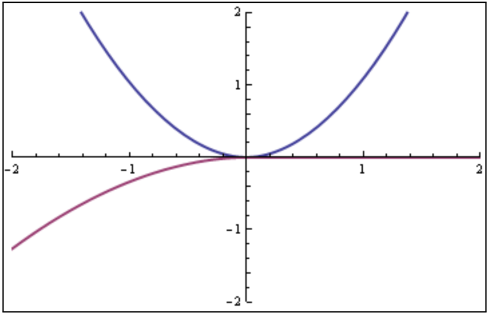
$$x^3 \left(\ln x - \frac{\frac{11}{6}}{3!} \right) = \boxed{\frac{x^3}{6} \left(6 \ln x - \frac{11}{6} \right)}$$

$$f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \lim_{n \to \frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\ln x - \psi^{(0)}(1-n) - \gamma}{\Gamma(1-n)} \right) = \boxed{\frac{\ln 4x}{\sqrt{\pi x}}}$$

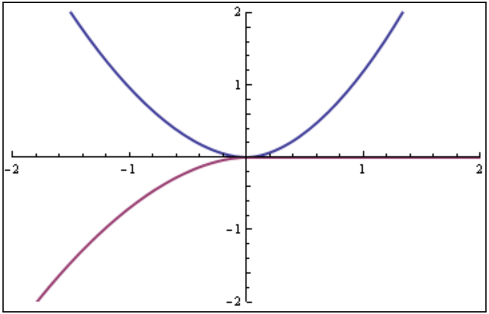
Poniżej przedstawiono, jak zmienia się wykres $f(x) = x^2$ wraz ze zwiększaniem stopnia pochodnej (ściślej: antyderywatywy) w zakresie $a \in [0, 3]$ ze skokiem $0, 1$. **Fioletowym** kolorem zaznaczono część urojoną, **niebieskim** – rzeczywistą. Wykres obejmuje przedział $[-2, 2]$. Współczynniki zaokrąglono, by móc lepiej zaobserwować ich zmianę.



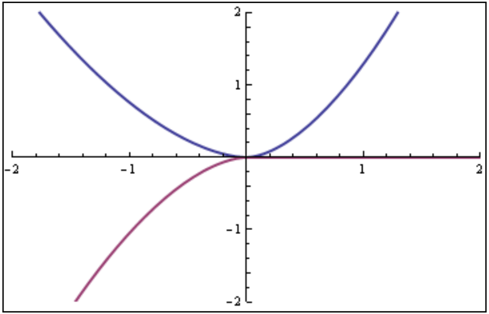
$$f^{(0)}(x) = x^2$$



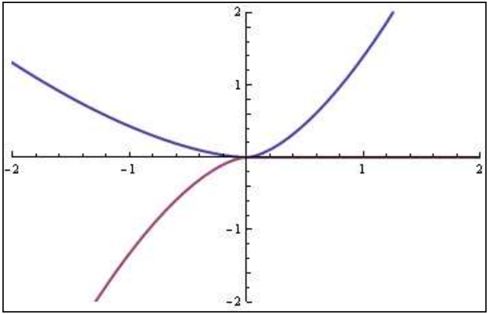
$$f^{(0,1)}(x) = 1,09448x^{1,9}$$



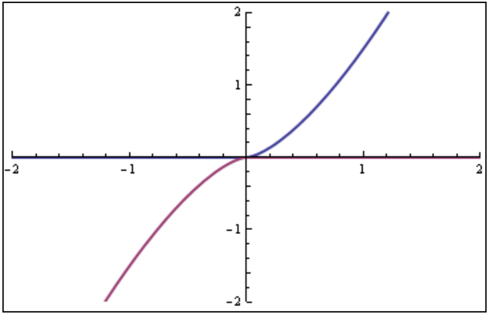
$$f^{(0,2)}(x) = 1,19297x^{1,8}$$



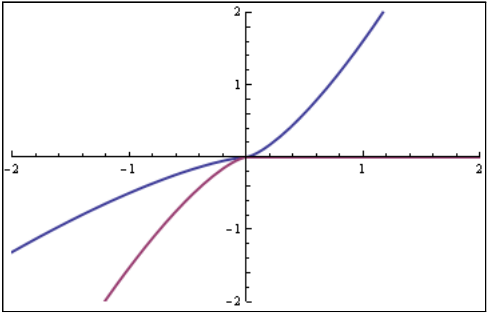
$$f^{(0,3)}(x) = 1,29476x^{1,7}$$



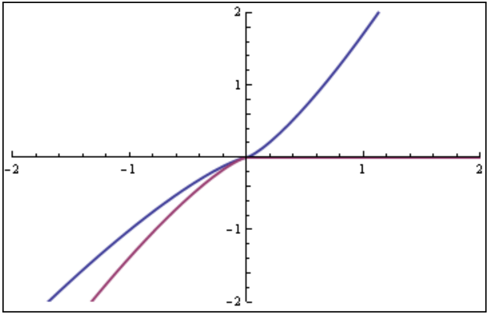
$$f^{(0,4)}(x) = 1,39897x^{1,6}$$



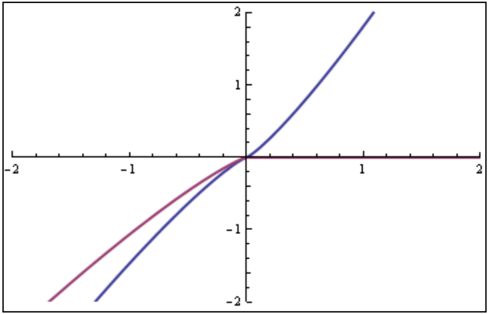
$$f^{(0,5)}(x) = 1,50451x^{1,5}$$



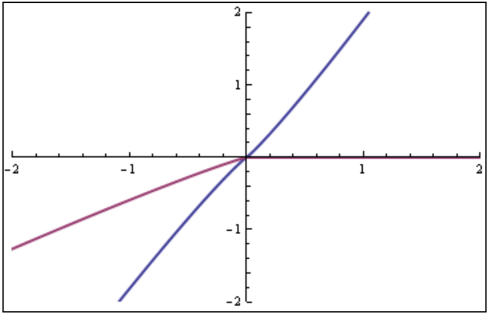
$$f^{(0,6)}(x) = 1,61009x^{1,4}$$



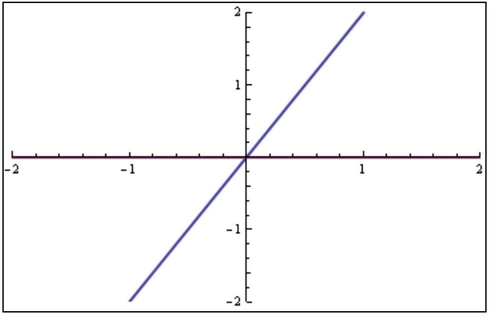
$$f^{(0,7)}(x) = 1,71422x^{1,3}$$



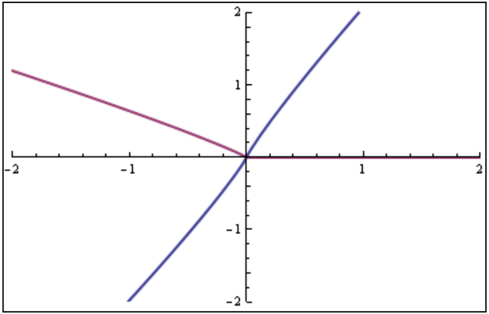
$$f^{(0,8)}(x) = 1,81521x^{1,2}$$



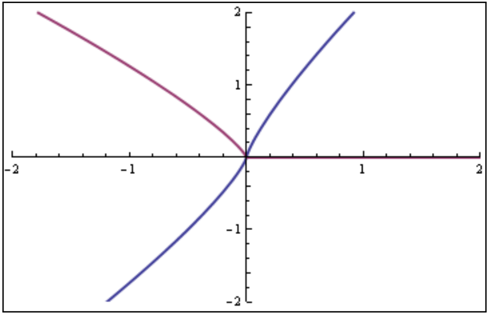
$$f^{(0,9)}(x) = 1,91116x^{1,1}$$



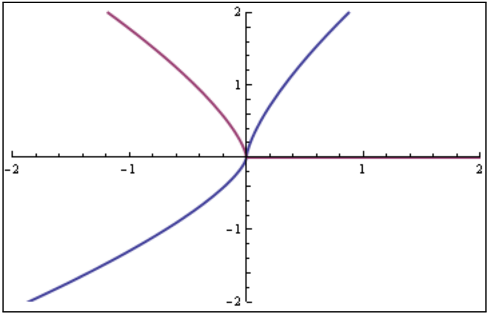
$$f^{(1)}(x) = 2x$$



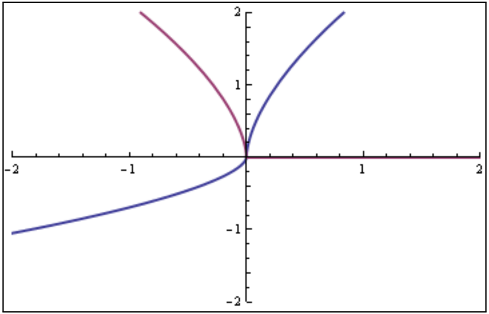
$$f^{(1,1)}(x) = 2,07951x^{0,9}$$



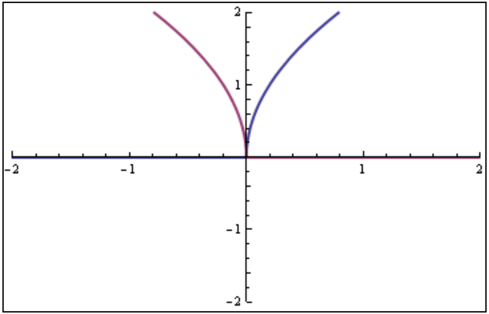
$$f^{(1,2)}(x) = 2,14734x^{0,8}$$



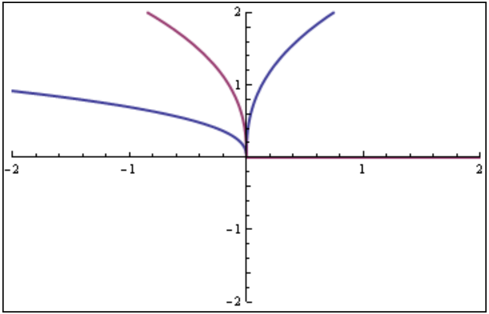
$$f^{(1,3)}(x) = 2,20109x^{0,7}$$



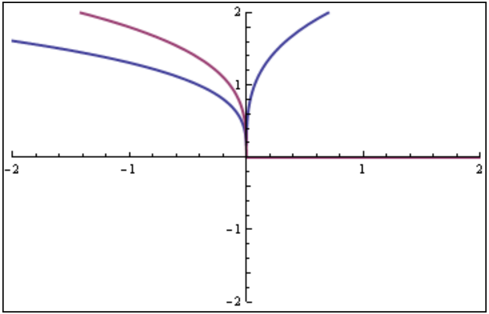
$$f^{(1,4)}(x) = 2,23835x^{0,6}$$



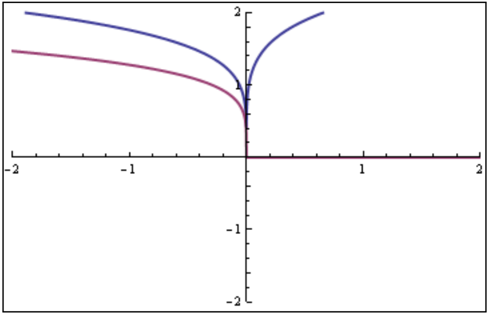
$$f^{(1,5)}(x) = 2,25676x^{0,5}$$



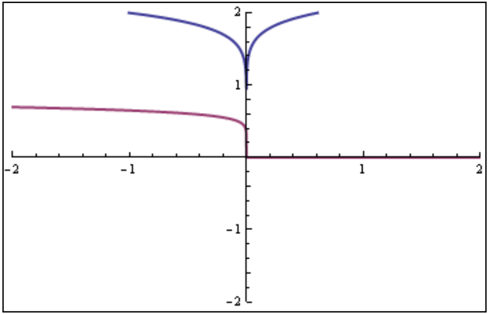
$$f^{(1,6)}(x) = 2,25412x^{0,4}$$



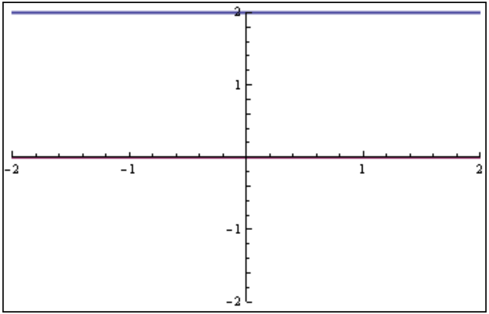
$$f^{(1,7)}(x) = 2,22849x^{0,3}$$



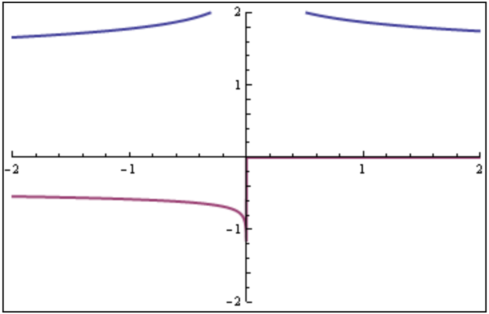
$$f^{(1,8)}(x) = 2,17825x^{0,2}$$



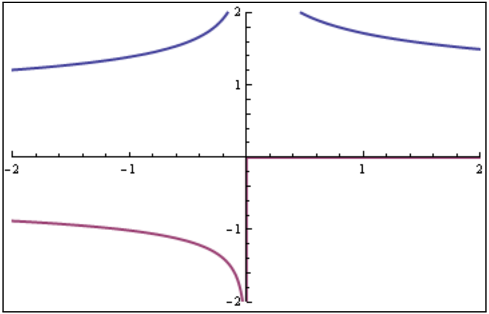
$$f^{(1,9)}(x) = 2,10227x^{0,1}$$



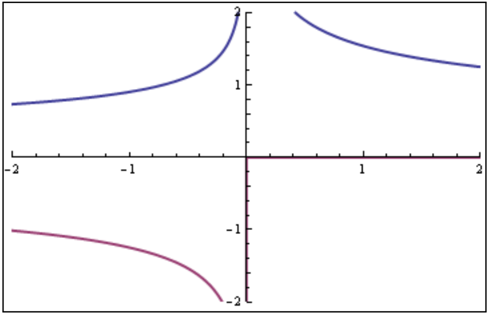
$$f^{(2)}(x) = 2$$



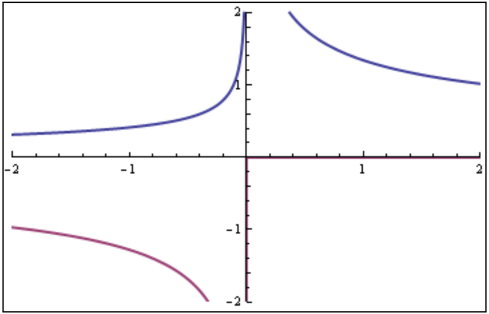
$$f^{(2,1)}(x) = 1,87156x^{-0,1}$$



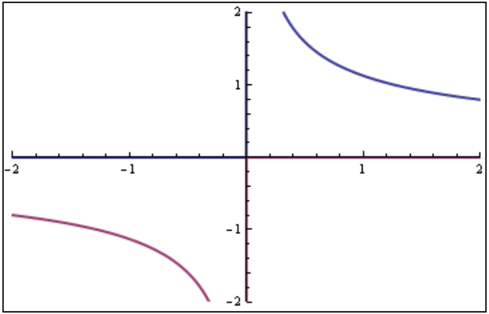
$$f^{(2,2)}(x) = 1,71787x^{-0,2}$$



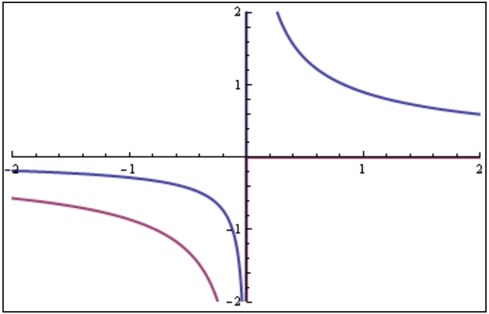
$$f^{(2,3)}(x) = 1,54077x^{-0,3}$$



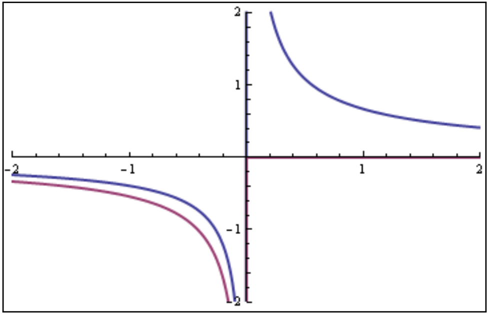
$$f^{(2,4)}(x) = 1,34301x^{-0,4}$$



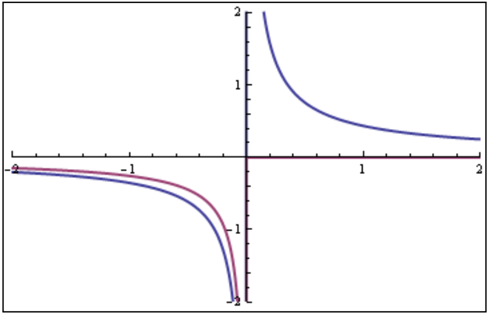
$$f^{(2{,}5)}(x) = 1{,}12838x^{-0{,}5}$$



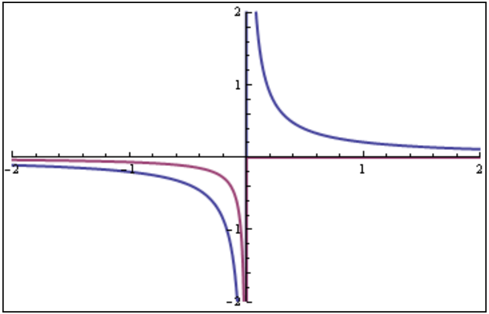
$$f^{(2,6)}(x) = 0,90165x^{-0,6}$$



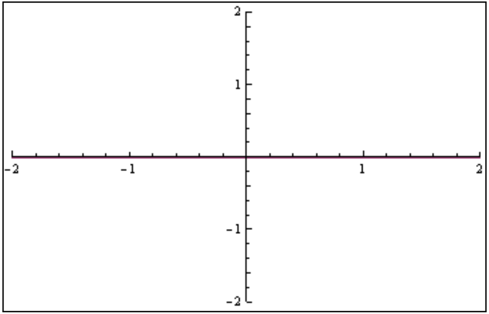
$$f^{(2,7)}(x) = 0,66855x^{-0,7}$$



$$f^{(2,8)}(x) = 0,43565x^{-0,8}$$



$$f^{(2,9)}(x) = 0,21028x^{-0,9}$$



$$f^{(3,0)}(x) = 0$$

Wartości współczynników wyznaczono z dosyć skomplikowanego wzoru na a-tą pochodną x^n:

$$\begin{cases} (-1)^a \cdot x^{n-a} \cdot \frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(-n)} & a \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge n < 0 \wedge n < a \\ (-1)^{n-1} \cdot x^{n-a} \cdot \frac{\ln(x)+\psi^{(0)}(-n)-\psi^{(0)}(-a+n+1)}{\Gamma(-n)\Gamma(-a+n+1)} & n \in \mathbb{Z} \wedge n < 0 \\ x^{n-a} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-a+n+1)} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Wartości współczynników wyznaczono z dosyć skomplikowanego wzoru na a-tą pochodną x^n:

$$\begin{cases} (-1)^a \cdot x^{n-a} \cdot \frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(-n)} & a \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge n < 0 \wedge n < a \\ (-1)^{n-1} \cdot x^{n-a} \cdot \frac{\ln(x)+\psi^{(0)}(-n)-\psi^{(0)}(-a+n+1)}{\Gamma(-n)\Gamma(-a+n+1)} & n \in \mathbb{Z} \wedge n < 0 \\ x^{n-a} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-a+n+1)} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Funkcje gładkie wraz ze swoimi wszystkimi pochodnymi stopnia $a \in \mathbb{R}$ mogą tworzyć pewne przestrzenie.

Okazuje się, że pochodne ułamkowe mają zastosowanie w opisie **dynamiki płynów**, które jako funkcje zmian względem parametru a mogą opisywać zachowania cieczy.

Okazuje się, że pochodne ułamkowe mają zastosowanie w opisie **dynamiki płynów**, które jako funkcje zmian względem parametru a mogą opisywać zachowania cieczy. Ciekawym zastosowaniem jest również równanie różniczkowe Bagleya-Torvika, które dobrze modeluje zjawiska **tłumienia**.

Okazuje się, że pochodne ułamkowe mają zastosowanie w opisie **dynamiki płynów**, które jako funkcje zmian względem parametru a mogą opisywać zachowania cieczy. Ciekawym zastosowaniem jest również równanie różniczkowe Bagleya-Torvika, które dobrze modeluje zjawiska **tłumienia**. Operatory różniczko-całkowe rzeczywistego stopnia znalazły swoje zastosowanie także w dziedzinie **teorii sterowania**.

To jest już koniec wstępu do pochodnych ułamkowych. W następnej części zostaną omówione dokładniej następujące kwestie:

To jest już koniec wstępu do pochodnych ułamkowych. W następnej części zostaną omówione dokładniej następujące kwestie:

1. pochodne ułamkowe funkcji elementarnych wraz z przykładowymi wyprowadzeniami,

To jest już koniec wstępu do pochodnych ułamkowych. W następnej części zostaną omówione dokładniej następujące kwestie:

1. pochodne ułamkowe funkcji elementarnych wraz z przykładowymi wyprowadzeniami,
2. operacje na złożeniach oraz iloczynach (uogólnienie Oslera) funkcji ciągłych,

To jest już koniec wstępu do pochodnych ułamkowych. W następnej części zostaną omówione dokładniej następujące kwestie:

1. pochodne ułamkowe funkcji elementarnych wraz z przykładowymi wyprowadzeniami,
2. operacje na złożeniach oraz iloczynach (uogólnienie Oslera) funkcji ciągłych,
3. łączenie operatorów różniczkowych i całkowych,

To jest już koniec wstępu do pochodnych ułamkowych. W następnej części zostaną omówione dokładniej następujące kwestie:

1. pochodne ułamkowe funkcji elementarnych wraz z przykładowymi wyprowadzeniami,
2. operacje na złożeniach oraz iloczynach (uogólnienie Oslera) funkcji ciągłych,
3. łączenie operatorów różniczkowych i całkowych,
4. warunki łączenia operatorów,

To jest już koniec wstępu do pochodnych ułamkowych. W następnej części zostaną omówione dokładniej następujące kwestie:

1. pochodne ułamkowe funkcji elementarnych wraz z przykładowymi wyprowadzeniami,
2. operacje na złożeniach oraz iloczynach (uogólnienie Oslera) funkcji ciągłych,
3. łączenie operatorów różniczkowych i całkowych,
4. warunki łączenia operatorów,
5. wstęp do funkcji hipergeometrycznych[3].

[3] M.in. można nimi wyrazić rozwiązania równań różniczkowych (vide równanie Kummera) czy pierwiastki wielomianów stopnia $n \geqslant 5$.

- **R. Gorenflo, F. Mainardi** *Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order*. In: A. Carpinteri and F. Mainardi (editors): Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer Verlag, Wien and New York, pp. 223-276.
- **K.B. Oldham, J. Spanier** *Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, Inc., New York-London, 1974
- **J. Munkhammar** *Fractional Calculus and the Taylor-Riemann series*, RHIT U. J. Math. 2005.

Dziękuję za uwagę.